ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
08/062017
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Απόδειξη θεωρήματος σελ. 135

Α.2 ψ παράδειγμα f(x)=|x| συνεχής στο (0,0) όχι όμως και παραγωγίσιμη

Α.3 Ορισμός σελ. 73

Α4. Λάθος Σωστό Λάθος Σωστό Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f(x) έχει πεδίο ορίσμου Α=$\mathbb{R}-\{1\}$

Η g(x) έχει πεδίο ορίσμου Β=(0,1)

Άρα η $(f\circ g)(x)$ έχει πεδίο ορίσμου Γ=(0,1)

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln\frac{x}{1-x}$

Β2. Βρίσκουμε $h'(x)=\frac{1}{x(1-x)} > 0$ άρα η h(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) και αντιστρέφεται .

Θέτουμε $y=\ln\frac{x}{1-x}$ και λύνουμε ως προς χ οπότε

$\chi=\frac{e^y}{1+e^y}$ άρα $f^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

Β3. $\varphi(\chi)=\frac{e^x}{1+e^x}$ Βρίσκουμε την $\varphi'(\chi)=)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ >0

δηλαδή η φ(χ) νείναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$\varphi''(\chi)=\ )=\frac{e^{x}\,(1-e^{x})}{(1+e^{x})^{3}}$ βλέπουμε ότι μηδενίζεται για χ=0 και

$\varphi''(\chi)>0$ στο$(-\infty,0)$ άρα φ(χ) κυρτή

$\varphi''(\chi)<0$ στο$(0,+\infty)$ άρα φ(χ) κοίλη

Το $(0\ ,\frac{1}{2})$ είναι σημείο καμπής

Β4. $\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\overset{DLH}{=}1$ άρα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

y=1

$\lim_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=0$ άρα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

y=0

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της f(x) θα είναι της μορφής

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

$y+ημx_1=-συνx_1(x-x_1)$ η οποία διέρχεται από το $A(\frac{\pi}{2}\ ,-\frac{\pi}{2})$ άρα

$-\frac{\pi}{2}+ημx_1=-συνx_1(\frac{\pi}{2}-x_1)$

$-\frac{\pi}{2}+ημx_1+συνx_1(\frac{\pi}{2}-x_1)$

Θέτω $κ(χ)=-\frac{\pi}{2}+ημx+συνx(\frac{\pi}{2}-x)$

Είναι $κ(0)=0$ και $κ(\pi)=0$

Επειδή $κ'(x)=-ημ(\frac{\pi}{2}-x)$

Και κ(x) γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{\pi}{2})$

Ενώ κ(x) γνησίως αύξουσα στο $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

Οι λύσεις της κ(χ) είναι μοναδικές και οι εφαπτομένες έχουν εξισώσεις

y=-x και y =x-π

Γ2. $f''(\chi) = -\eta\mu\chi > 0$ άρα η κ(χ) είναι κυρτή και βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες

$$E_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)+\pi)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x)-\chi+\pi)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\eta\mu\chi+\pi)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\eta\mu\chi-\chi+\pi)dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ τ.μ.}$$

$$E_2=\int_0^{\pi} -f(x)dx = \int_0^{\pi} \eta\mu\chi dx = 2\text{τ.μ.}$$

$$\frac{E1}{E2} = \frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. $\lim_{\chi\to\pi} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim_{\chi\to\pi} \frac{1}{f(x)-x+\pi}\,(f(x)+x) = +\infty \cdot \pi = +\infty$

Γ4. $f(x) > x-\pi \quad \chi>0$

$$\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1-\frac{\pi}{\chi}\right)dx = [\chi - \pi \ln x]_1^e = e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f(x) συνεχής για x ϵ $[-1,0)$ ως πράξεις συνεχών

Η f(x) συνεχής για x ϵ $(0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών

Εξετάζω στο x_0 =0

$$\lim_{\chi\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\chi\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x-0}\overset{DLH}{=}0$$

$$\lim_{\chi\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\eta\mu\chi}{x}\,e^x=1$$

Το χ=0 είναι κρίσιμο σημείο αφού η f δεν έχει παράγωγο

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} & \chi\epsilon[-1,0)\\ e^x(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi) & \chi\epsilon(0,\pi]\end{cases}$$

f΄(x)=0

$e^x(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi)=0$ και $\chi=\frac{3\pi}{4}$ είναι επίσης κρίσιμο σημείο

Δ2. f΄(x)<0 για κάθε χε(-1,0) η f είναι γνησίως φθίνουσα

f΄(x)>0 για κάθε χε$(0,\frac{3\pi}{4})$ η f είναι γνησίως αύξουσα

f΄(x)<0 για κάθε χε$(\frac{3\pi}{4},\pi)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Ακρότατα f(-1) τοπικό μέγιστο

f(0) τοπικό ελάχιστο

$f(\frac{3\pi}{4})$ τοπικό μέγιστο

f(π) τοπικό ελάχιστο

f(0)=0 και $f(\frac{3\pi}{4})=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$

Το σύνολο τιμών της f είναι $[0,\ e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}]$

Δ3. Ισχύει $\int_0^{\pi}(e^x\,\eta\mu\chi-e^{5x})dx=$

$$\int_0^{\pi}(e^x\,\eta\mu\chi dx - \int_0^{\pi} e^{5x}\,dx = \frac{e^{\pi}+1}{2} - \frac{e^{5\pi}+1}{5}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με κατά παράγοντες ολοκλήρωση κάνοντας κύκλο και το δεύτερο είναι απλό.

Δ4. Έχουμε $f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$

$16e^{\frac{-3\pi}{4}} f(x) < 8\sqrt{2}$ (1)

$-e^{\frac{-3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 \leq 0$ (2)

(1) + (2) έχουμε $16e^{\frac{-3\pi}{4}} f(x) - e^{\frac{-3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 \leq 8\sqrt{2}$

Η ισότητα ισχύει μόνο για την τιμή $\chi=\frac{3\pi}{4}$ που είναι μοναδική λύση.